第八章习题

8.1 证明集合 $A=\left\{x\in[0,1] \mid \exists k\in[\![0,2^n]\!]\ x=\frac{k}{2^n}\right\}$

在 $[0,1]$ 中稠密.

8.2 两个有下界的实序列的乘积还是有下界的吗?

8.3 设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为单调序列. 证明, 如下定义的序列 $(v_n)_{n\geq1}$

$$v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$$

也是单调的, 且与 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有相同的单调性.

8.4 证明: 若某实序列从某项开始是递增的, 则其有下界.

8.5 设 (u_n) 为实数序列. 在以下序列中, 找出谁是谁的子序列:

$(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times2^n})_{n\in\mathbb{N}}$

$(u_{3\times2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$. $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$. $(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

8.6 设 u 为一实序列. v 为其一子序列. 证明: v 的任一子序列都是 u 的一个子序列.

8.7 求下列~~数列~~序列的极限

1). $u_n=\dfrac{\sin(n^2)}{n}$

2) $u_n=\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$ $(a>0, b>0)$.

3) $u_n=\dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+1/n^2}$, 4) $u_n=\dfrac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}}$

8.8 设实序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 分别收敛于 l 和 l'.

考虑、通项~~式~~分别为

$$u_n = \min\{a_n, b_n\}, \text{ 和 } v_n = \max\{a_n, b_n\}$$

的两个序列. 证明这两序列分别收敛于

$$\min\{l, l'\} \quad \text{和} \quad \max\{l, l'\}$$

8.9 1) 设 u 为一实的递增序列,且其有一有上界子序列.

证 u 是收敛的

2). 设 u 为一递增实序列, 满足

$$\forall p\in\mathbb{N} \quad |u_{2^{p+1}} - u_{2^p}| \leq \frac{1}{2^p}$$

证明 u 收敛.

8.10 设两正序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \; u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \; v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$$

证明: 这两个序列收敛于同一极限.

8.11 设实正序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足: 对于任意 $k\in\mathbb{N}$,

集合 $\{n\in\mathbb{N} \mid u_n > 10^{-k}\}$ 有限. 证明: 此序列收敛于 0.

8.12 考虑以 $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 为通项的序列.

确定实数 a, b, c 使得: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$

~~考~~导出由 $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ 定义的序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的极限.

8.13 研究在 $\mathbb{N}^*$ 上如下定义 $u_n = \begin{cases} 1+\frac{1}{p}, & \text{若 } n = 2p \\ 1-\frac{1}{p^2} & \text{若 } n = 2p+1 \end{cases}$

的序列

8.14 证明：从一个非有上界的序列中，可抽取出一个发散到∞的子序列。

8.15 设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为每项都是整数的实序列，证明：

如果该序列是收敛的，则这个序列是稳定的。 不变的 静态的

8.16 考察如下定义的序列 $(u_n)_{n\geq 1}$，$(v_n)_{n\geq 1}$：

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},\quad v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}$$

1) 证明：u 和 v 是相伴的

2) 证明：它们相同的极限是一个无理数

~~3)~~ 提示：假设此极限为有理数 ℓ，并~~证明~~

通过利用事实：$\forall n\in\mathbb{N}^*$，$u_n<\ell<v_n$，证明这是不可能的。

3). 对于 $(a,b)\in\mathbb{R}^2$，用 ℓ 的函数形式表示通项为

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{ak+b}{k!}$$

的序列的极限。

8.17 证明通项为 $u_n=\dfrac{3n^2+\sin n}{3(n+2)^2\cos\frac{n\pi}{3}}$ 的序列是发散的。

8.18 研究通项为

$$u_n=\left(5\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{5}\cos n\right)^n$$

的序列 u 的敛散性。

8.19 设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一有界序列，且 $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是单调的

证明：序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛。

8.20 设 u 为一序列，若有一序列 $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ 收敛于0，满足

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad |u_n|\leq \alpha_p+\frac{p}{n+1}$$

证明 序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于0.

8.21 Cesàro 定理

设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为实序列. 定义序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$$v_n=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$$

1) 在这一问中假设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于0. 我们想证序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 也收敛于0. 设 $\varepsilon>0$.

(a). 证明，存在一个整数 n_0，使得对于 $n\geq n_0$：

$$\left|\frac{u_{n_0}+u_{n_0+1}+\cdots+u_n}{n}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

以下 n_0 记这一整数.

(b) 证明：存在整数 n_1 使得对于 $n\geq n_1$：

$$\left|\frac{u_1+u_2+\cdots+u_{n_0-1}}{n}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

以下 n_1 记这一整数

(c) 导出声明的结论.

2) 一般地，证明：若序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛，则序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ 也收敛且与 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有着相同极限.

证明：其逆命题是错的.

8.22 设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为实序列. 定义序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$v_n=\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n^2}.$$

证明: 若序列 u 收敛, 则序列 v 也收敛.

我们希望用上一习题的方法. 因此我们可以从辅序列开始考虑.

8.23 考虑由 u_0 及递归关系式 $u_{n+1}-(n+1)u_n=2^n(n+1)!$ 定义的序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ~~确定~~ 将 u_n 表示为 n 的函数.

8.24 考虑两个发散到 ∞ 的两个序列 u 和 v, 且

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=0.$$

固定 $\varepsilon>0$, 考虑整数 n_0 使得 $n\geqslant n_0$ 时 $|u_{n+1}-u_n|\leqslant\varepsilon$.

1). 证明, 对于任何大于等于 u_{n_0} 的 x, 存在一项 u_p, 使得 $|u_p-x|\leqslant\varepsilon$.

2) 利用 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 发散到 $+\infty$, 证明, 对所有实数 x, 存在 $(p,m)\in\mathbb{N}^2$ 使得 $|(u_p-v_m)-x|\leqslant\varepsilon$

3) 推导集合 $\{u_p-v_m;\ (p,m)\in\mathbb{N}^2\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

8.25 以下命题是对的吗?

设 u 和 v 为两序列, 在某序位之后, 不消失且 ~~相等~~ 等价.

若 v 从某序位之后, v 是单调的, 则 u 在某序位之后 u 也是单调的

8.26 给出以下序列的简单的等价序列

1) $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

2) $v_n = e^{1/n} - e^{1/(n+1)}$

3) $w_n = \sqrt{1 + \frac{1}{\ln(n+1)}} - 1$.

8.27 设 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是由 $u_0 > 0$. 和 $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ 定义的序列. 通过考量 $\frac{1}{u_n}$, 证明 $u_n \sim \frac{1}{n}$.

8.28 1) 证明: $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$

2). 推导出 $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ 的简单等价形式.

8.29 用符号 "o", 比较下面四个序列

$u_n = n(\ln n)^2$, $v_n = (n^2)^{\ln n}$, $w_n = (\ln n)^{n\ln n}$, $z_n = (n\ln n)^n$

8.30. 证明 $\sum_{k=1}^{n} k! \sim n!$